Tº de la utilidad

JUAN CARLOS GARCIA–BERMEJO OCHOA

Preferencias instantáneas e intertemporales: Una curiosidad

I. Introduccion

La programación intertemporal con cambio de preferencias es un terreno propicio a la aparición de fenómenos chocantes[1]. En estas páginas dirigiremos nuestra atención a las dificultades existentes para poder identificar en planteamientos de ese carácter una serie de relaciones de preferencia racionalizadoras de las elecciones del agente en cada período y que cupiera interpretar como las preferencias instantáneas contenidas o inducidas por las intertemporales supuestas de partida.

La línea de investigación sobre las relaciones entre preferencias o funciones de utilidad instantáneas e intertemporales de mayor solera es, sin duda, la orientada a establecer las condiciones en que una función intertemporal de utilidad puede considerarse función de funciones instantáneas de utilidad de los períodos cubiertos por aquélla, aunque no sea la única en torno al tema o a temas convergentes[2]. Pero es un buen ejemplo de hasta qué punto tales análisis guardan en última instancia un sentido de coherencia y clarificación conceptual. Pues tanto la práctica teórica como la pedagógica hacen uso de uno u otro tipo de planteamientos, instantáneos o intertemporales, no en referencia a clases de agentes distintos, sino en virtud de lo que requiera el problema que se tenga entre manos. Lo que plantea de forma natural el tema de las relaciones entre ambos tipos de planteamientos, y la cuestión de si uno de ellos no invalida o acota la pertinencia del otro y en qué medida lo haga.

Por otra parte, es tópica la afirmación de que el cambio de preferencias, por frecuente que sea el fenómeno en la realidad, es un caso fronterizo para la capacidad del análisis convencional. Pero ésta es tam-

1. En Yaari (1977) puede encontrarse una exposición del tema especialmente atractiva.

2. Koopmans (1960), complementado por Koopmans, Diamond y Williamson (1964), consistuye una referencia clásica en torno al primero de los temas, siendo Gorman (1968) un tratamiento comprehensivo también de cita obligada.

bién una afirmación a matizar y sistematizar. Un cambio, por ejemplo, en las preferencias instantáneas conocido de antemano por el agente y que éste pudiera recoger en una relación intertemporal, no desborda en absoluto la capacidad de las técnicas de análisis habituales.

Enmarcado por estas dos vertientes de consideraciones, el hecho que se subraya en este trabajo y que motiva el resto de las cuestiones que en él se abordan, es el siguiente. Dada una serie de relaciones intertemporales de preferencia correspondientes a una sucesión finita de períodos, aunque cada una de ellas reúna las propiedades habitualmente postuladas sobre las relaciones de preferencia y sean todas ellas conocidas por el agente desde el principio, no existe en general una serie correlativa de relaciones de preferencia instantáneas capaces de racionalizar las elecciones a realizar en cada período, si tales relaciones han de ser consistentes con las intertemporales en el sentido propuesto por R.H. Strotz, que es el sentido de referencia obligada en la literatura para tales casos[3].

Ello nos mueve a indicar otros posibles sentidos de consistencia más débiles, incluyendo el derivado de la propuesta de B. Peleg y M. Yaari[4], cuya insuficiencia se pone de manifiesto. Lo que nos lleva a concluir que no viene impuesto un único sentido de consistencia, y que, por tanto, no puede suponerse que en general vengan inequívocamente determinadas por las intertemporales las relaciones de preferencia instantáneas consistentes con ellas.

Esto no ocurre, sin embargo, si las preferencias intertemporales satisfacen ciertas condiciones conocidas, que mencionamos. Pero tales condiciones o imponen propiedades muy restrictivas sobre cada relación, o eliminan sencillamente el cambio en las preferencias. Por lo que formulamos una nueva condición, que permite que las preferencias varíen suavemente, y que da lugar a una situación análoga sin tener que imponer restricciones ulteriores[5].

II. Simbolos utilizados y presupuestos de partida

Para todo período, $t = 1, \ldots, T$, supondremos dado un espacio de bienes o espacio de consumos, X_t, caracterizado formalmente como el

3. Strotz introdujo la idea en Strotz (1955), trabajo cuyos resultados fueron corregidos en Pollak (1968).

4. Formulada en Peleg y Yaari (1973), y recogida también en Yaari (1977).

5. Todo ello sin perder de vista un fenómeno formalmente trivial, pero que es necesario retener en el tipo de planteamiento que nos ocupa. Que aun en el caso de que dada una serie de preferencias intertemporales, exista otra de instantáneas consistentes con ellas y capaces de racionalzar las elecciones de cada período, estas últimas preferencias (salvo la del último período) pueden variar con los precios, los ingresos y los tipos de interés que el agente espere, sean o no ciertas esas expectativas.

ortante no negativo del espacio euclídeo n-dimensional[6], y llamaremos "consumo" a toda combinación de cantidades de bienes fechados en un mismo período, x_t, siendo x_{ti}, $i = 1,..., n$, una cantidad de un bien de ese período. Por ${}_tX$ entenderemos el producto cartesiano de todos los espacios de consumos correspondientes al período t y a los períodos siguientes, y por ${}_m^tX$ el producto cartesiano de los espacios de consumos correspondientes al período m, $m < t$, y a todos los períodos siguientes hasta t, excluído éste. En consecuencia, ${}_tx = (x_t, x_{t-1},..., x_T) = ({}^m_tx, {}_mx) = ({}^m_tx, x_m, {}_{m+1}x)$, $m \geqslant t$.

La notación adoptada para los precios es similar, ${}_tp = (p_t, p_{t-1},..., p_T) = ({}^m_tp, {}_mp)$, etc... Los precios, que se suponen positivos y conocidos por el agente, son precios anticipados en términos de un numerario del período inicial, lo que nos dispensa de toda consideración explícita de los tipos de interés.

Por w entenderemos la riqueza inicial, que supondremos asimismo conocida por el agente, y por ${}_tw$ la riqueza al comienzo del período t; w_t, por el contrario, será el gasto efectuado en ese período. En consecuencia, para cada combinación de precios y cada período pueden definirse tres conjuntos presupuestarios. El conjunto de planes factibles a partir de ese período, ${}_tB({}_tp, {}_tw) = \; {}_tx / {}_tp_tx \leqslant {}_tw \;$; el conjunto de consumos factibles en ese período, $B_t(p_t, {}_tw) = \; x_t/p_tx_t \leqslant {}_tw \;$; y el conjunto de consumos que se hubiera podido adquirir con un gasto deteminado, $B^t(p_t, w_t) = \; x_t/p_tx_t \leqslant w_t \;$. Naturalmente, $w \geqslant 0$ en todos los casos.

Supondremos que el agente establece en cada período una relación de preferencia intertemporal, que simbolizaremos por R^t, y que conoce desde el principio todas las relaciones de la serie. Todas las R^t serán preórdenes totales de ${}_tX$ con las restantes propiedades habituales, esto es, serán relaciones binarias fuertemente conexas, transitivas, crecientes, estrictamente convexas, y continuas en ${}_tX$. No se excluye la posibilidad de que las relaciones correspondientes a los períodos posteriores al inicial vengan condicionadas a las elecciones habidas en los períodos previos[7]. Para referirnos a cualesquiera otras relaciones utilizaremos subíndices antepuestos o postpuestos, como hicimos anteriormente, según cuál sea el espacio de planes o consumos en el que la relación esté definida. Así, R_t será una relación definida en X_t, y ${}_tR$ será una relación definida en ${}_tX$. Por último, para indicar que una relación está condicionada a una sucesión anterior o posterior de consumos, escri-

6. La exposición es más sencilla si se supone que el número de bienes es el mismo en todos los períodos, aunque no sea necesario hacerlo.

7. Es decir, es un planteamiento suficientemente general como para cubrir tanto el cambio exógeno como el endógeno.

biremos expresiones de la forma "${}_t x \; {}_t R({}^t\overline{x})_t x'$", "$x_t \; R_t({}^t\overline{x}) \; x_t'$" o "$x_t \; R_t({}^t\overline{x}; {}_{t+1}\overline{x}) \; x_t'$".

III. Consistencia

Suponiendo dada, por tanto, una serie de T relaciones intertemporales de preferencia con las características indicadas, la pregunta es qué condiciones ha de reunir una serie correlativa de relaciones instantáneas, definidas cada una de ellas en el espacio de consumos del período correspondiente, para que podamos hablar de consistencia entre ambas.

El primer grupo de relaciones instantáneas que resulta obligado explorar, es el de las relaciones inducidas en los espacios de consumos por las intertemporales de partida. Concretamente, las relaciones que la intertemporal de cada período induce sobre el espacio de consumos de ese mismo período. Como la serie de las intertemporales induce una serie distinta de relaciones instantáneas condicionada a cada plan de consumos, el problema requiere determinar previamente los consumos a elegir por el agente en los diversos períodos. Así, una serie de relaciones instantáneas inducidas por las intertemporales puede considerarse una serie de relaciones instantáneas potencialmente vigentes cada una de ellas en su período correspondiente, si el plan de consumos que condiciona la serie es una sucesión de consumos óptimos en referencia cada uno de ellos a la relación inducida en el período de su fecha. Concretamente, dado un plan de consumos $\overline{x}$, unos precios p y una riqueza inicial w, la serie de relaciones definidas para cada período así, para todo

$$x_t, x_t', \quad x_t \; R_t^t({}_{t+1}\overline{x}) \; x_t'$$

siempre y cuando

$$(x_t, {}_{t+1}\overline{x}) \; R^t \qquad\qquad R^t(x_t', {}_{t+1}\overline{x}),$$

es una serie de relaciones instantáneas potencialmente vigentes si

$$\overline{x} \in C_{PY}(p, w),$$

donde

$$C_{PY}(p, w) = \quad x/x \in B(p, w)$$

y para todo

$$x_t' \in B^t(p_t, w_t), \qquad (x_t, {}_{t+1}x)\ R^t(x_t', {}_{t+1}x), \qquad t = 1, ..., T,$$

siendo

$$w_t = w - \sum_{i=1}^{t-1} p_i x_i - \sum_{j=t+1}^{T} p_j x_j \quad .$$

El conjunto $C_{PY}(p, w)$ es en nuestra construcción el conjunto de soluciones de la programación propuesta por B. Peleg y M.E. Yaari, en torno a las que estos autores destacan dos extremos. De un lado, su condición de puntos de equilibrio en el sentido de Nash, por lo que las denominan "planes de consumo de equilibrio". De otro, su consistencia con el sistema de preferencias intertemporales, ya que "el agente no tiene motivo alguno para variar su decisión en el período t, ..., dadas sus elecciones en los restantes períodos"[8].

Es dudoso, sin embargo, que el concepto de plan de equilibrio pueda representar una condición de consistencia siquiera mínima, como pretenden sus proponentes. Un ejemplo muy sencillo bastará para ilustrarlo. Sea un modelo de almacenamiento de dos períodos cuyo volumen inicial de existencias es K, y cuyas relaciones intertemporales de preferencia son las representadas por la función de utilidad $u_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$ para el período inicial, y por la función $u_2(x_2) = x_2$ para el segundo período. El conjunto de planes de equilibrio es $x/x_1 + x_2 = K$, mientras que la solución de máximo es $\overline{x}_1 = K/2$, $\overline{x}_2 = K/2$. En consecuencia, con todo plan de equilibrio distinto de $\overline{x}$ ocurre que hay un curso de acción abierto al agente tal que no teniendo éste motivo para variar su decisión en el período 2, puesto que $\overline{x}_2$ es la solución de maximizar $u_2(x_2)$ bajo la restricción $x_2 = K - x_1$ es estrictamente preferido al plan de equilibrio desde el punto de vista $u_1(x_1, x_2)$. En suma, la condición mínima de consistencia parece ser más bien que en casos como éste la relación instantánea de preferencia a aceptar para el período 1, discrimine entre $\overline{x}_1$ y x_1^* en favor del primero, puesto que $\overline{x}_1$ conduce siempre a un curso de acción estrictamente preferido por el agente, y éste lo sabe[9].

Para ejemplos como el utilizado, el diseño de la estrategia sofisticada de Strotz y Pollak ofrece el medio de definir las relaciones buscadas.

8. Paleg y Yaari (1973), p. 395. También subrayan estos autores que el agente no se arrepentirá, pero este aspecto no es pertinente en nuestro planteamiento puesto que en cada período R^t viene definida en ${}_tX$, no en ${}_1X$.

9. Estas consideraciones son convergentes con las formuladas por Selten en torno a los puntos de equilibrio de Nash en el marco de la teoría de los juegos y que justifican su propuesta de la noción de "equilibrio perfecto". *Vide* Harsanyi (1977), pp. 331 y ss. También hay que decir que Paleg y Yaari son conscientes de los problemas de su propuesta a la que consideran "mínima", no una condición suficiente. *Vide* Peleg y Yaari (1973), p. 395.

Dados unos precios y una riqueza inicial, $h_2(x_1; p, w) = \{x_2/x_2 \in B_2(p_2, w_2)$ y para todo $x_2' \in B_2(p_2, w_2)$, $u_2(x_2) \geqslant u_2(x_2')$, siendo $w_2 = w - p_1 x_1\}$, es una función continua y cóncava de $B_1(p_1, w)$ en X_2. Consecuencia de ello es que R_1, definida así, para todo

$$x_1, x_1' \in B_1(p_1, w), \qquad x_1 R_1 x_1'$$

siempre y cuando

$$u_1(x_1, h_2(x_1; p, w)) = u_1(x_1', h_2(x_1'; p, w)),$$

es un preorden total del conjunto $B_1(p_1, w)$ que reúne todas las restantes propiedades habitualmente postuladas de las relaciones de preferencia, salvo la monotonicidad. Y que satisface la condición deseada de consistencia, puesto que si según R_1 un consumo del período 1 es débilmente preferido a otro, éste no puede conducir a una sucesión de elecciones superior a la que lleva aquél desde el punto de vista intertemporal de ese período.

Generalizando el procedimiento para $T \geqslant 2$, podría definirse recursivamente una relación para cada período $t = 1, ..., T - 1$, de la manera siguiente: para todo

$$x_t, x_t' \in B_t(p_t, {}_tw), \quad x_t R_t x_t'$$

siempre y cuando

$$(x_t, {}_{t+1}h(x_t; {}_tp, {}_tw))\ R^t(x_t', {}_{t+1}h(x_t'; {}_tp, {}_tw)),$$

donde

$${}_{t+1}h(x_t; {}_tp, {}_tw) = (h_{t+1}(x_t; {}_tp, {}_tw), h_{t+2}(x_t; {}_tp, {}_tw), ..., h_T(x_t; {}_tp, {}_tw)),$$

$$h_{t+i}(x_t; {}_tp, {}_tw) = \quad x_{t+i}/x_{t+i} \in B_{t+i}(p_{t+i}, {}_{t+i}w)$$

y para todo

$$x_{t+i}' \in B_{t+i}(p_{t+i}, {}_{t+i}w), \quad x_{t+i} R_{t+i} x_{t+i}', \quad i = 1, ..., T - t, \quad R_T = R^T, \text{ y}$$

$${}_{t+i}w = {}_tw - p_t x_t - \sum_{j}^{i-1} p_{t+j};\ h_{t+j}(x_t; {}_tp, {}_tw).$$

Y la condición de consistencia más obvia para cualquier relación instantánea de preferencia de cada período consistiría en requerir que coincidiese con la R_t así definida, en el conjunto presupuestario correspondiente. La dificultad más inmediata con que tropieza este procedimiento, es que en general y aunque todas las relaciones intertemporales posean todas las propiedades usuales, ni siquiera $h_T(x_t; {}_tp, {}_tw)$ es necesariamente cóncava, por lo que R_{T-1} puede no ser estrictamente convexa, y $h_{T-1}(x_t; {}_tp, {}_tw)$ puede, por tanto, no ser una función. En consecuencia, se hace necesario considerar cuáles pueden ser los requisitos de consistencia en tales circunstancias, que hacen el problema más ambiguo.

Las condiciones de consistencia más fuertes vinculadas a la idea original de Strotz, son las que excluyen que para dos consumos de cualquier período, x_t y x'_t, x_t sea preferido o indiferente a x'_t cuando este último pueda conducir a una sucesión de elecciones superior desde el punto de vista intertemporal del período a alguno de los cursos de acción a que x_t puede dar lugar. De esta manera, si la relación instantánea de preferencia de cada período cumple esa condición, y el agente elige un consumo óptimo según aquélla, $\overline{x}_t$, entre los consumos factibles en el período correspondiente, ningún otro consumo le hubiera podido llevar a una serie de elecciones mejor, desde su punto de vista intertemporal de ese período, que la serie que va a realizar, aunque ésta no venga unívocamente determinada de antemano.

Una condición de este tipo es la siguiente para unos precios y una riqueza inicial dados:

A.– Para todo $x_t, x'_t, t = 1, ..., T$,

si $x_t \, R_t x'_t$ entonces, si $t = T$, $x_t R^t x'_t$, y si

a) $t \neq T$,

b) $x_t \neq x'_t$, y

c) ${}_{t+1}h(x_t; {}_tp, {}_tw) \neq \emptyset$, ${}_{t+1}h(x'_t; {}_tp, {}_tw) \neq \emptyset$,

entonces, para todo

$$ {}_{t+1}x \in {}_{t+1}h(x_t; {}_tp, {}_tw), $$

y todo

$$ {}_{t+1}x' \in {}_{t+1}h(x'_t; {}_tp, {}_tw), \quad (x_t, {}_{t-1}x) \, R^t (x'_t, {}_{t-1}x), $$

donde

$$ {}_{t+1}h(x_t; {}_tp, {}_tw) = \left\{ {}_{t+1}x / x_{t+i} \in h_{t+i}(x_{t+i-1}; {}_{t+i-1}p, {}_{t+i-1}w), \quad i = 1, ..., T-t \right\}, $$

$$h_{t+i}(x_{t+i-1};\, {}_{t+i-1}p,\, {}_{t+i-1}w) = x_{t+i}/x_{t+i} \in B_{t+i}(p_{t+i},\, {}_{t+i}w),$$

y para todo

$$x'_{t+i} \in B_{t+i}(p_{t+i},\, {}_{t+i}w), \quad x_{t+i}\ R_{t+i}\ x'_{t+i} \quad ,$$

$$\text{y} \quad {}_{t+i}w = {}_{t}w - p_t\, x_t - \sum_{j}^{i-1} p_{t+j}\, h_{t+j}(x_t;\, {}_tp\, {}_tw)$$

Como condición suficiente, (A) parece decididamente aceptable. Pero tal como está formulada, esto es, como condición necesaria, puede resultar demasiado restrictiva. Puesto que para cualquier período $t = 1, ..., T - 2$, si R_t es una relación que la satisface, puede por ello no ser conexa en el conjunto $x_t/{}_{t+1}h(x_t;\, {}_tp,\, {}_tw) \neq \emptyset$.

No han dejado de señalarse en la literatura expendientes adicionales encaminados a eliminar la posible indeterminación de las elecciones futuras a partir de cada período, indeterminación que aparenta ser el origen del problema. El más clásico, por ser ya mencionado por Strotz en su trabajo inicial, es el de permitir el agente obligarse de antemano a seguir un único curso de acción en lo períodos siguientes, cuando su elección de un consumo en un período dado no le impone una sucesión única de elecciones futuras[10]. Otro consistiría en adoptar un tratamiento probabilístico ante la incertidumbre en torno a las acciones futuras[11]. Como todos los expedientes de este tipo comparten el propósito de hacer de ${}_{t+1}h(x_t;\, {}_tp,\, {}_tw)$, o de la relación que la sustituya, una función en todos los períodos, logran obviar (si las relaciones intertemporales son conexas) la dificultad que señalábamos. Con otras palabras, para cualquier período, si R_t satisface (A), será conexa en $x_t/{}_{t+1}h(x_t;\, {}_tp,\, {}_tw) \neq$ $\neq \emptyset$. Pero no se avanza gran cosa. R_t puede no ser superiormente semicontinua[12], con lo que al igual que en la situación anterior, puede no dar lugar a consumo óptimo alguno bajo la restricción presupuestaria del período.

Por otro lado y como Vd., lector, tendrá ya *in mente,* caben condiciones más débiles que (A), y que vendrían a reflejar diferentes actitudes por parte del agente sobre la posibilidad de seguir en el futuro un curso de acción peor que otro que también le estaba abierto. Y para esta gama de actitudes sí parece estar bien definido su extremo inferior. En efecto, parece claro que la condición mínima de consistencia ha de garantizar en todo caso que si un consumo es preferido o indiferente a

10. Strotz (1955), p. 173. Véase también Blackorby, Nissen, Primont y Russell (1973), p. 245.

11. Blackorby *et alii* (1973), *ibidem.*

12. Como ocurre en el contraejemplo presentado en Peleg y Yaari (1973), pp. 393-4.

otro desde el punto de vista instantáneo en cualquier período, de entre todas las series de elecciones en y a partir del período que uno y otro hagan posibles, haya por lo menos una asociada con el primero y otra con el segundo tales que aquélla sea preferida o indiferente a ésta desde el punto de vista intertemporal. Lo contrario sería legitimar que un consumo pudiera resultar preferido o indiferente a otro, aunque todas las series de elecciones asociadas a éste fueran estrictamente preferidas a todas las asociadas con aquél. Que es lo que ocurre con el concepto de "plan de equilibrio" de Peleg y Yaari, al equiparar como soluciones consumos claramente discriminados por las preferencias intertemporales, y la razón por la que dicho concepto no constituye una noción siquiera mínima de consistencia.

Precisando, dado un sistema de relaciones intertemporales de preferencia, para cualquier combinación de precios y riqueza inicial, una serie de preferencias instantáneas es mínimamente consistente con dicho sistema, si

B.– Para todo $t = 1, \dots T$, y todo x_t, x'_t

si $x_t \, R_t \, x'_t$, entonces, si $t = T$, $x_t \, R^T \, x'_t$, y si

a) $t \neq T$,

b) ${}_{t+1}g(x_t; {}_tp, {}_tw) \neq \emptyset$, ${}_{t+1}g(x'_t; {}_tp, {}_tw) \neq \emptyset$

entonces hay un

$$_{t+1}x \in {}_{t+1}g(x_t; {}_tp, {}_tw),$$

y un

$$_{t+1}x' \in {}_{t+1}g(x'_t; {}_tp, {}_tw),$$

tales que

$$(x_t, {}_{t+1}x) \, R^t (x'_t, {}_{t+1}x'),$$

donde

$$_{t+1}g(x_t; {}_tp, {}_tw) = \; {}_{t+1}x / x_{t+i} \in g_{t+i}(x_{t+i-1}; {}_{t+i-1}p, {}_{t+i-1}w), \quad i = 1, \dots, T-t \;,$$

$$g_{t+i}(x_{t+i-1}; {}_{t+i-1}p, {}_{t+i-1}w) = \; x_{t+i} / x_{t+i} \in B_{t+i}(p_{t+i}, {}_{t+i}w),$$

y para todo

$$x'_{t+i} \in B_{t+i}(p_{t+i}, {}_{t+i}w), \quad x_{t+i}\ R_{t+i}\ x'_{t+i}, \text{ y}$$

$${}_{t+i}w = {}_{t}w - p_t x_t - \sum_{j}^{i-1} p_{t+j}\ h_{t+j}(x_t; {}_tp, {}_tw)$$

Naturalmente, (B) puede resultar demasiado débil. Queda satisfecha, por ejemplo, por una relación instantánea de cualquier período según la cual sean indiferentes consumos en ese período que considerados por pares, permita uno de ellos un curso de acción estrictamente preferido desde el punto de vista intertemporal a todos los que permite el otro[13]. Una condición intermedia, más fuerte que (B) y menos restrictiva que (A), es la siguiente:

C.– Para todo $t = 1, ..., T$, y todo x_t, x'_t,

si $x_t\ R_t\ x'_t$, entonces, si $t = T$, $x_t\ R^t\ x'_t$, y si

a) $t \neq T$,

b) $x_t \neq x'_t$

c) ${}_{t+1}G(x_t; {}_tp, {}_tw) \neq \emptyset$, ${}_{t+1}G(x'_t; {}_tp, {}_tw) \neq \emptyset$, entonces

i) o hay un ${}_{t+1}x \in {}_{t+1}G(x_t; {}_tp, {}_tw)$ tal que para todo ${}_{t+1}x'$ $\in {}_{t+1}G(x'_t; {}_tp, {}_tw)$, $(x_t, {}_{t+1}x)\ R^t\ (x'_t, {}_{t+1}x')$,

ii) o para todo ${}_{t+1}x' \in {}_{t+1}G(x'_t; {}_tp, {}_tw)$, hay un ${}_{t+1}x \in {}_{t+1}G(x_t; {}_tp, {}_tw)$, tal que $(x_t, {}_{t+1}x)\ P^t\ (x'_t, {}_{t+1}x')$,

donde ${}_{t+1}G(x_t; {}_tp, {}_tw)$, $G_{t+i}(x_{t+i-1}; {}_{t+i-1}p, {}_{t+i-1}w)$, $B_{t+i}(p_{t+i}, {}_{t+i}w)$ y ${}_{t+i}w$ se definen como los símbolos correspondientes en (A) y (B).

Aunque (C) sea más fuerte que (B), dos extremos merecen comentario. Por una parte, que si R^t es conexa, (C) no excluye la conexividad (débil) en el conjunto $x_t / {}_{t+1}G(x_t; {}_tp, {}_tw) \neq \emptyset$ de toda R_t que la satisfaga[14]. De otra, que al igual que (B), la condición (C) no im-

13. Por ejemplo, si al contraejemplo ya citado de Peleg y Yaari se le añade un período, 00, con una función de utilidad $u_{00}(y_{00}, y_0, y_1, y_2, y_3)$, (B) queda satisfecha por relaciones instantáneas para ese período que hacen indiferentes todos los consumos factibles en él.

14. Por simple equivalencia entre los cuantificadores, como puede comprobarse fácilmente.

pide que un consumo, x_t, sea preferido a otro, x'_t, desde el punto de vista instantáneo, aunque x'_t pudiera, de ser elegido, llevar a una sucesión de elecciones superior desde el punto de vista intertemporal a la que de hecho vaya a llevar la elección de x_t.

En síntesis, si bien (B) ha de considerarse una condición mínima, no hay razón lógica concluyente que identifique la noción de consistencia con ninguna de las tres condiciones expuestas (A), (B) o (C). Estas reflejarían más bien diferentes actitudes por parte del agente ante la posibilidad de seguir cursos de acción inferiores desde el punto de vista intertemporal de un período a otros que le resulta igualmente posible acometer, en un sentido análogo a como se reconoce la posibilidad de mantener, por ejemplo, diversas actitudes frente al riesgo. Y si esto es así, dada una serie de relaciones intertemporales de preferencia, unos precios y una riqueza inicial, la idea de consistencia no impone en general una series única de relaciones de preferencia instantáneas, aunque exista una.

IV. Existencia

Supuesta una serie de relaciones de preferencia instantáneas, diremos que un plan de consumos es óptimo respecto de esa serie para unos precios, p, y una renta inicial, w, si pertenece al conjunto

$$C(p, w) = \quad x/x_t \in B_t(p_t, {}_tw)$$

y para todo

$$x'_t \in B_t(p_t, {}_tw), \quad x_t \; R_t \; x'_t,$$

siendo

$${}_tw = w - \sum_{i=1}^{t-1} p_i x_i, \quad t = 1, ..., T$$

Si las relaciones instantáneas de la serie satisfacen alguna de las condiciones introducidas de consistencia con una serie dada de relaciones intertemporales, escribiremos el conjunto de óptimos en la forma "$C_A(p, w)$", "$C_B(p, w)$" o "$C_C(p, w)$" respectivamente, siendo $C_{PY}(p, w)$ el conjunto de planes de equilibrio en el sentido de Peleg y Yaari tal como quedó definido en la sección anterior.

Asimismo, nos referiremos a los procedimientos de obtención de tales soluciones, consistentes en ir optimizando sucesivamente respecto de la relación instantánea de cada período bajo la restricción presupuestaria correspondiente, como los programas PR(A), PR(B) o PR(C), según que las relaciones instantáneas cumplan (A), (B) o (C).

Es inmediato que $C_A(p, w) \subset C_C(p, w) \subset C_B(p,w)$, y ya quedó indicado que $C_{PY}(p, w) \not\subset C_B(p, w)$.

Se sabe que la estrategia sofisticada de Strotz y Pollak no admite siempre solución, aun cuando las preferencias intertemporales de todos los períodos posean las propiedades habituales[15], lo que quiere decir que PR(A) no tiene solución en general aunque las preferencias intertemporales tengan esas propiedades. Lo que a su vez significa que dado un sistema de relaciones intertemporales de preferencia fuertemente conexas, transitivas, crecientes, estrictamente convexas y continuas, no existe en general una serie correlativa de relaciones instantáneas que sean a la vez consistentes con aquéllas según (A), y capaces de generar al menos un consumo óptimo en cada período bajo restricciones presupuestarias de las características usuales, o lo que es lo mismo, en conjuntos presupuestarios compactos y convexos. Concretando más. Como toda relación de preferencia fuertemente conexa, transitiva y superiormente semicontinua, o fuertemente conexa, convexa y superiormente semicontinua en un subconjunto compacto de X_t, da lugar por lo menos a un punto óptimo en dicho subconjunto[16], no existe en general una serie de relaciones definidas cada una de ellas en el espacio de consumos del período correspondiente, que sean consistentes con las intertemporales en el sentido de (A), y satisfagan uno de los dos grupos de propiedades señalados en los conjuntos presupuestarios que va generando PR(A).

Como las inclusiones "$C_A(p, w) \subset C_C(p, w) \subset C_B(p, w)$" son propias en general, hay casos en los que PR(A) no tiene solución, y existen, sin embargo, serie de relaciones instantáneas que satisfacen (B) o (C) y aseguran solución para PR(B) o PR(C). Uno de tales casos es el contraejemplo elaborado por Paleg y Yaari para establecer la inexistencia de solución general de la estrategia sofisticada de Strotz y Pollak, como puede comprobarse fácilmente[17]. Pero no parece que incluso la condición (B) sea suficientemente flexible para que la convexidad estricta y la continuidad de las relaciones intertemporales sean capaces de asegurar la semicontinuidad superior de todas las instantáneas consistentes con ellas en el sentido de esa condición[18]. En cualquier caso, no conocemos hasta el momento condiciones que sean necesarias y suficientes para que PR(B) o PR(C) tengan solución.

Los resultados más generales recogidos en la literatura centrada en este tipo de problemas, se limitan a establecer condiciones suficientes pa-

15. Véase, por ejemplo, Peleg y Yaari (1973), pp. 292 y ss.
16. Véase Sonnenschein (1971), teoremas 2 y 3.
17. Basta observar que para cualquier K, $x_0 = K-3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, es una solución bajo las dos programaciones.
18. El problema básico es el señalado por Backorby *et alii* (1973), p. 245.

ra la existencia de solución única para la estrategia sofisticada de Strotz y Pollak, o simplemente para la estrategia ingenua. En ambos casos, esa solución única es, por definición, el único elemento de $C_A(p, w)$ para cada combinación de precios y riqueza, y es asimismo plan óptimo según PR(B) y PR(C). Más, las condiciones postuladas en ellos implican la igualdad de $C_A(p, w)$, $C_B(p, w)$ y $C_C(p, w)$. Y son resultados llamativamente restrictivos.

Dada una serie de relaciones intertemporales de preferencia y una combinación de precios y riqueza inicial, por estrategia ingenua se entiende el procedimiento por el que en cada período se determina un plan, ${}_tx^{(t)}$, óptimo respecto de R^t bajo la restricción presupuestaria impuesta por ${}_tp$ y ${}_tw = w - \sum_{i=1}^{t-1} p_i x_i^{(i)}$, y se elige como consumo del período $x_t^{(t)}$.

La estrategia ingenua se dice que es consistente si para todo (p, w) y todo $t = 1, ..., T$, ${}_tx^{(1)} = {}_tx^{(t)}$. Pues bien, es trivial que si la estrategia ingenua es consistente, sus soluciones serán óptimos para PR(A), y que si admite una única solución, este plan será el elemento único de $C_A(p, w)$. Como es asimismo trivial que la estrategia ingenua es consistente (y tiene solución única bajo las propiedades postuladas en la sección II sobre las R^t), si para todo par de relaciones intertemporales sucesivas y todo (p, w),

$$_{t+1}R^t(x_t^{(t)}) = R^{t+1},$$

y en general, si para todo ${}^{t+1}x$

$$_{t+1}R^t({}^{t+1}x) = R^{t+1}({}^{t+1}x),$$

condición ésta implicada por las restantes condiciones expuestas por C. Blackorby y otros para asegurar la consistencia de la estrategia ingenua[19]. Es decir, la estrategia ingenua es consistente, y por tanto, PR(A), PR(B) y PR(C) tienen solución, si en la interpretación al uso las preferencias no cambian. Pero en un contexto intertemporal éste es el caso de menor significación. Y la estrategia sofisticada y diseños afines está ideados precisamente en atención a que esa condición pueda no cumplirse y, en consecuencia, la estrategia ingenua pueda no resultar adecuada.

En tales casos, Blackorby y otros demuestren que la estrategia de Strotz y Pollak tiene solución única si las relaciones intertemporales, además de tal como quedaron configuradas en la sección II, son homotéticas, que es la condición que asegura de forma más directa la concavidad

19. Backorby *et alii* (1973).

de las ${}_{t+1}h(x_t;\ {}_tp,\ {}_tw)$, y que el conjunto de las alternativas entre las que hay que determinar un plan óptimo en cada período, sea cerrado[20]. Como ya quedó apuntado, esa solución es el único plan óptimo para PR(A), PR(B) y PR(C). Y si (A), (B) y (C) se convierten en definiciones, las relaciones instantáneas generadas por las intertemporales para cada período, reúnen todas las propiedades habituales salvo la monotonicidad en los conjuntos $B_t(p_t,\ {}_tw)$, como puede comprobarse fácilmente.

Las dificultades conceptuales ya comentadas de la noción de plan de equilibrio de Peleg y Yaari habrían quedado contrapesadas si su existencia dependiera de estipulaciones menos restrictivas. Pero no se ha demostrado que sea así. Las restricciones que dicho autores se ven obligados a introducir, como Backorby y otros no dejan de señalar, son esencialmente análogas a la homoteticidad de las R^t [21].

Por lo demás y tratándose de un problema de cambio de preferencias, parece natural que la búsqueda de solución haya de proceder atendiendo más a la forma de dicho cambio, esto es, el ritmo o intensidad con que éste vaya teniendo lugar, que a la forma de cada una de las relaciones intertemporales aisladamente consideradas. Así, resulta lógico preguntarse por las consecuencias de que el cambio de las preferencias fuera produciéndose de forma continua, planteamiento justificado no sólo por la omnipresencia de las condiciones de continuidad en la práctica teórica, sino por su especial pertinencia en relación con el cambio endógeno.

Una manera de estipular que el cambio sea continuo en un marco de tiempo discreto como en el que nos movemos, consiste en requerir de todo par de relaciones intertemporales sucesivas de una serie, que para todo par de planes a partir del primero de los dos períodos, ${}_{t+1}x$ y ${}_{t+1}x'$, y toda sucesión de consumos previos, ${}^{t+1}\overline{x}$, si

$$ {}_{t+1}x \ {}_{t+1}P^t({}^{t+1}\overline{x})\ {}_{t+1}x', $$

entonces para todo entorno de

$$ {}_{t+1}x, \quad N({}_{t+1}x), $$

haya un

$$ {}_{t+1}x^N \in N({}_{t-1}x) $$

20. Blackorby *et alii* (1973), p. 246.
21. Peleg y Yaari (1973) sección VIII y Blackorby y otros (1973), p. 246, nota 1.

tal que

$$ {}_{t+1}x^{N} \; R^{t+1}({}^{t+1}\overline{x}) \; {}_{t+1}x'. $$

Consecuencia inmediata de esta condición y de la semicontinuidad superior de $R^{t+1}({}^{t+1}\overline{x})$ es que si

$$ {}_{t+1}x \; {}_{t+1}P^{t}({}^{t+1}\overline{x}) \; {}_{t+1}x', $$

entonces

$$ {}_{t+1}x \; R^{t+1}({}^{t+1}\overline{x}) \; {}_{t+1}x'. $$

Lo que unido a la convexidad estricta de las R^t no lleva a la conclusión de que la estrategia ingenua es consistente[22]. De donde se infiere por su mismo diseño la existencia de solución (única si las R^t son estrictamente convexas como hemos supuesto) para la estrategia sofisticada de Strotz y Pollak, y asimismo para PR(A), PR(B) y PR(C).

Referencias

BLACKORBY, C., NISSEN, D., PRIMONT, D. y RUSSELL, R.R. (1973):. "Consistent Intertemporal Decision Making", en *Review of Economic Studies,* Abril de 1973, pp. 239-248.

BUTTS, R.E. y HINTIKKA, J. (eds.) (1977): *Foundational Problems in the Special Sciences. Part Two of the Proceedings of the Fifth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, London, Ontario, Canada, 1975.* Reidel Publ. Co. Dordrecht/Boston, 1977.

22. Se trata de demostrar que para todo (p, w) y todo $t = 1, ..., T$, ${}_tx^{(t)} = {}_tx^{(1)}$, donde ${}_tx^{(t)}$ es un plan de consumos tal que

a) ${}_tx^{(t)} \in {}_tB({}_tp, {}_tw)$, ${}_tw = w - \sum_{1}^{t-1} p_i x_i^{(i)}$, y

b) para todo ${}_tx \in {}_tB({}_tp, {}_tw)$, ${}_tx^{(t)} \; R^t \; {}_tx$.

Si ${}_tx^{(t-1)} = {}_tx^{(t)}$ para todo $t = 1, ..., T$, entonces ${}_tx^{(1)} = {}_tx^{(t)}$, por lo que basta con establecer al antecedente. Por definición, ${}_tx^{(t-1)} \; {}_tR^{t-1}(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, ..., x_{t-1}^{(t-1)}) \; {}_tx$, para todo ${}_tx \in {}_tB({}_tp, {}_tw)$. Por la convexidad estricta de R^{t-1}, ${}_tx^{(t-1)} \; {}_tP^{t-1}(x_1^{(1)}, ..., x_{t-1}^{(t-1)}) \; {}_tx$ para todo ${}_tx \in {}_tB({}_tp, {}_tw)$. Por la condición de continuidad introducida en el texto, ${}_tx^{(t-1)} \; R^t(x_1^{(1)}, ..., x_{t-1}^{(t-1)}) \; {}_tx$ para todo ${}_tx \in {}_tB({}_tp, {}_tw)$. Por la convexidad estricta de R^t, ${}_tx^{(t-1)} P^t(x_1^{(1)}, ..., x_{t-1}^{(t-1)}) \; {}_tx$ para todo ${}_tx \in {}_tB({}_tp, {}_tw)$. Luego ${}_tx^{(t-1)} = {}_tx^{(t)}$.

CHIPMAN, J.S., HURWICZ, L., RICHTER, M.K. y SONNENSCHEIN, H.F. (1971): *Preferences, Utility, and Demand.* Harcourt Brace Jovanovich, Inc. N. York, 1971.

GORMAN, W.M. (1968): "The Structure of Utility Functions", en *Review of Economic Studies,* 1968, pp. 369-390.

HARSANYI, J.C. (1977): "Advances in Understanding Rational Behavior", en Butts y Hintikka (1977), pp. 315-43.

KOOPMANS, T.C. (1960): "Stationary Ordinal Utility and Impatience", en *Econometrica,* Abril de 1960, pp. 287-309.

KOOPMANS, T.C., DIAMOND, P.A. y WILLIAMSON, R.E. (1964): "Stationary Utility and Time Perspective", en *Econometrica,* Enero-Abril de 1964, pp. 82-100.

PELEG, B. y TAARI, M.E. (1973): "On the Existence of a Consistent Course of Action when Tastes are Changing", en *Review of Economic Studies,* 1973, pp. 391-401.

POLLAK, R.A. (1968): "Consistent Planning", en *Review of Economic Studies,* 1968, pp. 201-208.

SONNENSCHEIN, H.F. (1971): "Demand Theory Without Transitive Preferences, With Applications to the Theory of Competitive Equilibrium", en Chipman, Hurwicz, Richter y Sonnenschein (1971), pp. 215-23.

STROTZ, R.H. (1955): "Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization", en *Review of Economic Studies,* 1955-7, pp. 165-80.

YAARI, M.E. (1977): "Endogenous Changes in Tastes: A Philosophical Discussion", en *Erkenntnis,* 1977.